CHAPITRE I

Introduction – Rappels

1. Espaces vectoriels normés

Dans ce cours, tous les espaces vectoriels considérés seront des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie ou non que l'on notera E ou F.

Notations
Si $\dim E = N$, on notera :

- $B = (e_1, \dots, e_N)$ une base de E
- Pour $x \in E$, on notera $(x_1)_{i=1}^N$ ses coordonnées dans B, *i. e.* $x = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i e_i$.
  On utilisera l'abus de notation $x = (x_i)_{i=1}^N$.

Dans tout ce qui suit, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition (Norme)
On dit que $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une norme sur E si :

1. $\forall x \in E$, $\|x\| \geqslant 0$
2. $\|x\| = 0 \implies x = 0$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
4. $\forall x, y \in E$, $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

En particulier, on a $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|$.

On notera $\|\cdot\|_E$ une norme sur E ou $\|\cdot\|$ s'il n'y a pas d'ambiguité possible.
Une paire $(E, \|\cdot\|_E)$ est appelée espace vectoriel normé, noté E s'il n'y a pas d'ambiguité.

Sur un même espace vectoriel, on peut mettre différentes normes.

Exemple 1
$E = \mathbb{R}^N$ $(\dim E = N)$
Les applications suivantes sont des normes :

$$\|\cdot\|_p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_i)_{i=1}^N & \longmapsto & \|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{array} \right. \quad \forall p \geqslant 1 \text{ réel}$$

$$\|\cdot\|_\infty x \longmapsto \|x\|_\infty = \max_{i \in [\![1, N]\!]} (|x_i|)$$

Les cas $p = 1$, 2 et ∞ sont les plus utilisés.
Le cas $p = 2$ (la norme euclidienne) est le seul pour lequel la norme est associée à un produit scalaire (noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$) *i. e.* $\forall x, y \in E$, $\langle x, y \rangle_2 = \sum_{i=1}^N x_i y_i$ et $\|x\|_2 = \langle x, x \rangle_2^{\frac{1}{2}}$.

Exemple 2 (Normes produit)
$(E_i, \|\cdot\|_{E_i})_{i=1}^n$, on pose $E = E_1 \times \dots \times E_n$. On note $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$. Les applications suivantes sont des normes sur E :

$$\|\cdot\|_p : x \in E \longmapsto \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N} \|x_i\|_{E_i}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall p \geqslant 1 \text{ réel}$$

$$\|\cdot\|_\infty : x \in E \longmapsto \|x\|_\infty = \max_{i \in [\![1, N]\!]} (\|x_i\|_{E_i})$$

Exemple 3
$E = C([0,1], \mathbb{R})$
Les applications suivantes sont des normes sur E :

$$f \in E \longmapsto \left(\int_0^1 |f(t)|^p \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall p \geqslant 1 \text{ réel}$$

$$f \in E \longmapsto \sup_{[0,1]} |f|$$

Définition (Applications continues)
Soient E et F des espaces vectoriels normés, $U \subset E$ un ouvert et $f : U \longrightarrow F$ une application. On dit que f est continue en $x_0 \in U$ si $\lim\limits_{\|x - x_0\|_E \to 0} \|f(x) - f(x_0)\|_F = 0$ noté $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Pour $V \subset F$, on note $f^{-1}(V) = \{x \in E \ / \ f(x) \in V\}$ l'image réciproque de V par f.

Propriété (Caractérisation topologique)
f est continue en $x_0 \in E$ si et seulement si l'image réciproque de tout voisinage ouvert (resp. fermé) de $f(x_0)$ est un voisinage ouvert (resp. fermé) de x_0.

En particulier, f est continue sur E si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert (resp. fermé) de F est ouvert (resp. fermé) dans E.

Définition (Normes équivalentes)
On dit que deux normes N_1 et N_2 sur un même espace vectoriel E sont équivalentes si $\exists \alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1$ *i. e.* $\exists \alpha, \beta > 0$ tels que $\forall x \in E$, $\alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$. On note $N_1 \sim N_2$.

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence (*i. e.* $\sim$ est réflexive, symétrique et transitive).

Exemple 4
Les normes produits de l'**Exemple 2** sont toutes deux à deux équivalentes.
Les normes de l'**Exemple 1** aussi.

Théorème 1
Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

Démonstration – *Supposons que* $\dim E = N$. *Soit* $\|\cdot\|_E$ *une norme sur* E. *Montrons que* $\|\cdot\|_E \sim \|\cdot\|_1$ *et on aura le résultat par transitivité. Montrons que* $\exists \alpha > 0$ *tel que* $\forall x \in E$, $\|x\|_E \leqslant \alpha \|x\|_1$. *Soit* $x \in E$, *on a*

$$\begin{aligned} \|x\|_E &= \left\| \sum_{i=1}^N x_i e_i \right\|_E \\ &\leqslant \sum_{i=1}^N |x_i| \, \|e_i\|_E \\ &\leqslant \underbrace{\max_{i \in [\![1,N]\!]} \|e_i\|_E}_{\alpha > 0} \sum_{i=1}^N |x_i| \\ &= \alpha \|x\|_1 \end{aligned}$$

Montrons que $\exists \beta > 0$ *tel que* $\forall x \in E$, $\|x_1\|_1 \leqslant \beta \|x\|_E$. *Soit* $A = \{x \in E \ / \ \|x\|_1 = 1\}$ *un compact de* $(E, \|\cdot\|_1)$ *(fermé borné). De plus,* $\forall x, y \in E$, $\big| \|x\|_E - \|y\|_E \big| \leqslant \|x - y\|_E \leqslant \alpha \|x - y\|_1$ *donc* $\|\cdot\|_E$ *est continue sur* $(E, \|\cdot\|_1)$. *Ainsi,* $\|\cdot\|_E$ *est continue sur* A *qui est un compact de* $(E, \|\cdot\|_1)$ *donc elle admet un minimum sur* A : $\exists x_0 \in A$ *tel que* $\forall x \in A$, $\|x_0\|_E \leqslant \|x\|_E$. *De plus,* $\beta = \|x_0\|_E > 0$ *car* $\|x_0\|_1 = 1$ *donc* $x_0 \neq 0$. *Soit alors* $y \in E$ *non nul, on a* $x = \frac{y}{\|y\|_1} \in A$ *et donc* $\beta \leqslant \left\| \frac{y}{\|y\|_1} \right\|_E$ i. e. $\beta \|y\|_1 \leqslant \|y\|_E$. *D'où le résultat.* □

Remarque
Le **Théorème 1** est faux en dimension infinie : deux normes sur un même espace vectoriel E ne sont pas forcément équivalentes si $\dim E = +\infty$. Par exemple, sur $E = C([0,1], \mathbb{R})$, on définit $\forall f \in E$, $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t$ et $N_\infty(f) = \sup\limits_{[0,1]} |f|$. Alors la propriété

$$\exists c > 0 \text{ tel que } \forall f \in E, \ N_\infty(f) \leqslant c N_1(f)$$

est fausse. En effet, pour $f_n(x) = x^n$, $\forall n \geqslant 1$, on a $N_1(f_n) = \frac{1}{n+1}$ et $N_\infty(f_n) = 1$.

Proposition 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas $\dim E = N$)
$\forall x, y \in E$, $|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\|_2 \|y\|_2$ avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

2. Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Dans tout le paragraphe, E est un espace vectoriel normé.

Une suite $(x_n) \subset E$ converge vers $\ell \in E$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - \ell\|_E = 0$ noté $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
Si $\dim E = N$, pour $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_1$ on a que la convergence dans E équivaut à la convergence en coordonnées.
Si $E = E_1 \times \cdots \times E_N$ pour $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_1$, on a que la convergence dans E équivaut à la convergence en norme de chaque composante.

Propriété (Caractérisation des fermés)
$U \subset E$ est fermé si et seulement si toute suite d'éléments de U qui est convergente a sa limite dans U.

On dit que $(u_n) \subset E$ est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \geqslant 0 \text{ tel que } \forall n, p \geqslant N,\ \|u_n - u_p\|_E < \varepsilon$$

On sait que toute suite qui converge est de Cauchy.

Proposition 2

- Si $\dim E = N$ alors $(u_n) \subset E$ converge si et seulement si (u_n) est de Cauchy.
- Si $\dim E = +\infty$ alors si toute suite de Cauchy de E converge pour $\|\cdot\|_E$, on dit que $(E, \|\cdot\|_E)$ est complet. Si tel est le cas, on dit que $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach. En particulier, tout espace vectoriel normé de dimension finie est de Banach.

Propriété (Caractérisation séquentielle de la continuité)
Soit $f\colon U \subset E \longrightarrow F$ une application où U est un ouvert. On a f continue en $x_0 \in U \iff \forall (y_n) \subset U$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = x_0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = f(x_0)$.

3. Applications linéaires/multi-linéaires

Soient E et F des espaces vectoriels normés.
On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$.
On note $\mathbb{B}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.

Proposition 3
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue sur E
2. f est continue en 0
3. $\exists c > 0$ tel que $\forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leqslant c\|x\|_E$

Démonstration – $\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ *Évident.*
$\boxed{2. \Rightarrow 3.}$ *$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \rho > 0$ tel que $\|x\| < \rho \implies \|f(x)\|_F < \varepsilon$. En particulier, pour $\varepsilon = 1$, $\exists \rho > 0$, $\|x\|_E < \rho \implies \|f(x)\|_F < 1$. Soit $y \in E$ non nul, alors $x = \frac{y}{\|y\|_E}\frac{\rho}{2}$ vérifie $\|x\|_E = \frac{\rho}{2} < \rho$ donc $\left\|f\left(\frac{y}{\|y\|_E}\frac{\rho}{2}\right)\right\|_F < 1 \iff \|f(y)\|_F < \frac{2}{\rho}\|y\|_E$.*
$\boxed{3. \Rightarrow 1.}$ *Soit $x_0 \in E$ alors $\exists c > 0$ tel que $\forall x \in E$, $\|f(x) - f(x_0)\|_F = \|f(x - x_0)\|_F \leqslant c\|x - x_0\|$ donc f est continue en x_0.* $\square$

Théorème 2
Si E est de dimension finie alors $\mathcal{L}(E, F) = \mathbb{B}(E, F)$ *i. e.* toute application linéaire de E dans F est continue.

Démonstration – *Supposons $\dim E = N$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\forall x \in E$, $x = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i e_i$. Donc $\|f(x)\|_F = \left\|f\left(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i e_i\right)\right\|_F = \left\|\sum\limits_{i=1}^{N} x_i f(e_i)\right\|_F \leqslant \sum\limits_{i=1}^{N} |x_i|\,\|f(e_i)\|_F \leqslant c\|x\|_1$ pour $c \geqslant \max\limits_{i\in[\![1,N]\!]} \|f(e_i)\|_F$. Donc f est continue par la* **Proposition 3**. *En fait, f est continue sur $(E, \|\cdot\|_1)$ mais on est en dimension finie donc on a la continuité pour toute norme sur E.* $\square$

Remarque
Ce résultat est faux si E n'est pas de dimension finie.

Exemple 5
$E = C([0,1], \mathbb{R})$ et $f = \mathrm{Id}_E\colon (E, N_1) \longrightarrow (E, N_\infty)$. Alors f est continue si et seulement si $\exists c > 0,\ \forall g \in E,\ N_\infty(g) \leqslant cN_1(g)$ qui n'a pas lieu.

On munit alors $\mathbb{B}(E,F)$ d'une norme.

Proposition 4
Soient E et F des espaces vectoriels normés.

1. L'application définie $\forall f \in \mathbb{B}(E,F)$ par $\|f\|_{\mathbb{B}(E,F)} = \sup\limits_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|}$ est une norme sur $\mathbb{B}(E,F)$. On dit qu'elle est subordonnée aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.
2. $\forall f \in \mathbb{B}(E,F)$, $\|f\|_{\mathbb{B}(E,F)} = \sup\limits_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F = \sup\limits_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|}$.

Démonstration – *1. La seule chose à vérifier est que $\forall f \in \mathbb{B}(E,F)$, $\|f\|_{\mathbb{B}(E,F)} \in \mathbb{R}_+$ et donc en fait que $\|f\|_{\mathbb{B}(E,F)} < +\infty$. On note $A_f = \left\{ \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|} \middle/ x \in E \text{ et } x \neq 0 \right\}$, alors A_f est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée (car f est continue). Donc A_f admet une borne supérieure.*

2. Soit $f \in \mathbb{B}(E,F)$. On note $B_f = \{\|f(x)\|_F \ / \ \|x\|_E = 1\}$. On a $B_f \subset A_f$ et si $\alpha \in A_f$ alors $\exists x \in E$ non nul tel que $\alpha = \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F$ et alors $\exists y \in E$, $\|y\|_E = 1$ tel que $\alpha = \|f(y)\|_F$ et donc $\alpha \in B_f$. Donc $A_f = B_f$ d'où le résultat.
De même, on obtient la seconde égalité. □

Remarques

1. Pour $f \in \mathbb{B}(E,F)$, la valeur de $\|f\|_{\mathbb{B}(E,F)}$ dépend des normes choisies sur E et F.
2. $\|f\|_{\mathbb{B}(E,F)}$ est la borne sup de A_f *i. e.* le plus petit des majorants de A_f.
3. $c = \|f\|_{\mathbb{B}(E,F)}$ est la meilleur constante (la plus petite) dans l'inégalité $\|f(x)\|_F \leqslant c\|x\|_E$

Notation
Pour $f \in \mathbb{B}(E,F)$, on notera $\forall h \in E$, $f \cdot h = f(h)$.

Définition (Applications multi-linéaires)
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et $(E_i, \|\cdot\|_{E_i})_{i=1}^n$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés. On dit que f est n-linéaire sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ si elle est linéaire par rapport à chacune de ses n variables.

Notation

- $\mathcal{L}^n(E_1, \ldots, E_n; F)$ est l'ensemble des applications n-linéaires de $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans F avec $\mathcal{L}^n(E_1; F)$ si $E_1 = E_2 = \cdots = E_n$
- $\mathbb{B}^n(E_1, \ldots, E_n; F)$ est l'ensemble des applications n-linéaires continues avec $\mathbb{B}^n(E_1; F)$ si $E_1 = \cdots = E_n$

Remarque
On a l'analogue de la **Proposition 3** en remplaçant 3. par :

$$\exists c > 0 \text{ tel que } \forall (x_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n E_i,\ \|f(x_1, \ldots, x_n)\|_F \leqslant c\|x_1\|_{E_1} \ldots \|x_n\|_{E_n}$$

Proposition 5

1. L'application $f \in \mathbb{B}^n(E_1, \ldots, E_n; F) \longmapsto \|f\|_{\mathbb{B}^n} = \sup\limits_{\substack{x_i\in E_i\\ x_i\neq 0}} \frac{\|f(x_1,\ldots,x_n)\|_F}{\|x_1\|_{E_1}\cdots\|x_n\|_{E_n}}$ est une norme sur $\mathbb{B}^n(E_1, \ldots, E_n; F)$.
2. $f \in \mathcal{L}^n(E_1, \ldots, E_n; F)$ est continue si et seulement si la quantité $\|f\|_{\mathbb{B}^n}$ est finie.
3. Si $E_1 \times \cdots \times E_n$ est de dimension finie, alors $\mathcal{L}^n(E_1, \ldots, E_n; F) = \mathbb{B}^n(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Remarque
2. est valable pour les applications linéaires (cas $n = 1$).