

EXERCICE 1

On considère $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de la mesure de Lebesgue λ . On note $\lambda_2 = \lambda \otimes \lambda$ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$. On rappelle que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ désigne la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle coïncide avec la tribu produit $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Soient $f, g: (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ deux fonctions mesurables. On suppose que ces fonctions sont localement intégrables, c'est-à-dire intégrables pour la mesure de Lebesgue sur tous les intervalles bornés de $\mathbb{R}$.

On fixe $x \geq 0$ et on pose $\Phi(s, t) = \mathbb{1}_{\Delta_x}(s, t)f(s)g(t)$ où $\Delta_x = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq s \leq t \leq x\}$.

1. Montrer que Φ est mesurable de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
2. Montrer que Φ est λ_2 -intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

On pose maintenant $F(x) = \int_{[0,x]} f(t) \, d\lambda(t)$ et $G(x) = \int_{[0,x]} g(t) \, d\lambda(t)$.

3. Calculer $\int_{[0,x]} \left(\int_{[0,x]} \Phi(s, t) \, d\lambda(s) \right) d\lambda(t)$ à l'aide de g et F .
4. Calculer $\int_{[0,x]} \left(\int_{[0,x]} \Phi(s, t) \, d\lambda(t) \right) d\lambda(s)$ à l'aide de f , F et G .
5. En déduit la formule d'intégration par parties généralisée :

$$\int_{[0,x]} g(t)F(t) \, d\lambda(t) = F(x)G(x) - \int_{[0,x]} G(t)f(t) \, d\lambda(t)$$

1. $\mathbb{1}_{\Delta_x}$ est mesurable de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ dans $\mathbb{R}$ et f et g sont mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Alors, Φ étant le produit de $\mathbb{1}_{\Delta_x}$, f et g , Φ est mesurable de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
2. Pour montrer que Φ est λ_2 -intégrable sur $\mathbb{R}^2$, montrons que $\iint_{\mathbb{R}^2} |\Phi| \, d\lambda_2 < +\infty$. On peut appliquer le théorème de Fubini-Tonelli car $|\Phi|$ est positive et est mesurable car Φ est mesurable (question 1.).

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} |\Phi| \, d\lambda_2 &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\Phi| \, d\lambda(s) \right) d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\mathbb{1}_{\Delta_x}(s, t)f(s)g(t)| \, d\lambda(s) \right) d\lambda(t) \\ &= \int_{[0,x]} \left(\int_{[0,t]} |f(s)||g(t)| \, d\lambda(s) \right) d\lambda(t) \\ &= \int_{[0,x]} |g(t)| \left(\int_{[0,t]} |f(s)| \, d\lambda(s) \right) d\lambda(t) \end{aligned}$$

Or, $[0, t]$ étant borné, f est donc λ -intégrable sur $[0, t]$ et donc $|f|$ l'est aussi. On pose alors $M(t) = \int_{[0,t]} |f(s)| \, d\lambda(s)$. On a $\forall t \in [0, x]$, $0 \leq M(t) < +\infty$. Alors

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |\Phi| \, d\lambda_2 = \int_{[0,x]} |g(t)|M(t) \, d\lambda(t)$$

Or, $[0, x]$ étant borné, g est donc λ -intégrable sur $[0, x]$ et donc $|g|$ l'est aussi. De plus, comme $\forall t \in [0, x]$, $0 \leq M(t) < +\infty$, $|g|M$ est λ -intégrable sur $[0, t]$. Donc $\iint_{\mathbb{R}^2} |\Phi| \, d\lambda_2 < +\infty$ et alors

Φ est λ_2 -intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

3.

$$\begin{aligned}
\int_{[0,x]} \left(\int_{[0,x]} \Phi(s,t) \, d\lambda(s) \right) d\lambda(t) &= \int_{[0,x]} \left(\int_{[0,t]} f(s)g(t) \, d\lambda(s) \right) d\lambda(t) \\
&= \int_{[0,x]} g(t) \left(\int_{[0,t]} f(s) \, d\lambda(s) \right) d\lambda(t) \\
&= \int_{[0,x]} g(t)F(t) \, d\lambda(t)
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\int_{[0,x]} \left(\int_{[0,x]} \Phi(s,t) \, d\lambda(t) \right) d\lambda(s) &= \int_{[0,x]} \left(\int_{[s,x]} f(s)g(t) \, d\lambda(t) \right) d\lambda(s) \\
&= \int_{[0,x]} f(s) \left(\int_{[s,x]} g(t) \, d\lambda(t) \right) d\lambda(s)
\end{aligned}$$

Or, $\int_{[s,x]} g(t) \, d\lambda(t) = \int_{[0,x]} g(t) \, d\lambda(t) - \int_{[0,s]} g(t) \, d\lambda(t) = G(x) - G(s)$. D'où

$$\begin{aligned}
\int_{[0,x]} \left(\int_{[0,x]} \Phi(s,t) \, d\lambda(t) \right) d\lambda(s) &= \int_{[0,x]} f(s)(G(x) - G(s)) \, d\lambda(s) \\
&= \int_{[0,x]} f(s)G(x) \, d\lambda(s) - \int_{[0,x]} f(s)G(s) \, d\lambda(s) \\
&= G(x) \int_{[0,x]} f(s) \, d\lambda(s) - \int_{[0,x]} f(s)G(s) \, d\lambda(s) \\
&= F(x)G(x) - \int_{[0,x]} f(s)G(s) \, d\lambda(s)
\end{aligned}$$

5. Comme Φ est λ_2 -intégrable (question 2.) on a

$$\iint_{[0,x] \times [0,x]} \Phi \, d\lambda_2 = \int_{[0,x]} \left(\int_{[0,x]} \Phi(s,t) \, d\lambda(s) \right) d\lambda(t) = \int_{[0,x]} \left(\int_{[0,x]} \Phi(s,t) \, d\lambda(t) \right) d\lambda(s)$$

Et donc, en combinant les résultats des questions 3. et 4., on trouve bien

$$\int_{[0,x]} g(t)F(t) \, d\lambda(t) = F(x)G(x) - \int_{[0,x]} G(t)f(t) \, d\lambda(t)$$