CHAPITRE 2

Applications affines

E et E' sont deux espaces affines sur un même corps $\mathbb{K}$.

1. Définitions et premières propriétés

Théorème

Soit $f\colon E \longrightarrow E$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) f conserve les barycentres *i. e.* si $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i = 1$ alors $f\left(\sum\limits_{i\in I} \lambda_i A_i\right) = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i f(A_i)$.

(ii) Pour tout $A \in E$, l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \vec{E} & \longrightarrow & \vec{E}' \\ M-A & \longmapsto & f(M)-f(A) \end{array}\right.$ est linéaire.

(iii) Il existe $A \in E$ tel que $\left\{\begin{array}{ccc} \vec{E} & \longrightarrow & \vec{E}' \\ M-A & \longmapsto & f(M)-f(A) \end{array}\right.$ est linéaire.

Si (i), (ii) et (iii) sont vraies, l'application linéaire de (ii) ne dépend pas de A.

Démonstration : $\boxed{\text{(i)} \implies \text{(ii)}}$ On suppose que (i) est vrai. On pose $u\colon \left\{\begin{array}{ccc} \vec{E} & \longrightarrow & \vec{E}' \\ M-A & \longmapsto & f(M)-f(A) \end{array}\right.$. Soient $M, N \in E$. On a

$$\begin{aligned} u(\lambda(M-A)+\mu(N-A)) &= u(\underbrace{\lambda M + \mu N + (1-\lambda-\mu)A}_{\in E} - A) \\ &= f(\lambda M + \mu N + (1-\lambda-\mu)A) - f(A) \\ &= \lambda f(M) + \mu f(N) + (1-\lambda-\mu)f(A) - f(A) \\ &= \lambda(f(M)-f(A)) + \mu(f(N)-f(A)) \\ &= \lambda u(M-A) + \mu u(N-A) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{(iii)} \implies \text{(i)}}$ On suppose que (iii) est vraie.

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i A_i\right) &= f(A) + f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i A_i\right) - f(A) \\ &= f(A) + u\left(\left(\sum_{i\in I} \lambda_i A_i\right) - A\right) \\ &= f(A) + u\left(\sum_{i\in I} \lambda_i (A_i - A)\right) \\ &= f(A) + \sum_{i\in I} \lambda_i u(A_i - A) \\ &= f(A) + \sum_{i\in I} \lambda_i (f(A_i) - f(A)) \\ &= \sum_{i\in I} \lambda_i f(A_i) \end{aligned}$$

Soient $A, B \in E$. On pose $u_A\colon \left\{\begin{array}{ccc} \vec{E} & \longrightarrow & \vec{E}' \\ M-A & \longmapsto & f(M)-f(A) \end{array}\right.$ et $u_B\colon \left\{\begin{array}{ccc} \vec{E} & \longrightarrow & \vec{E}' \\ M-B & \longmapsto & f(M)-f(B) \end{array}\right.$.
Soit $\vec{v} \in \vec{E}$. On pose $\vec{v} = M - A = N - B$.

$$\begin{aligned} u_A(\vec{v}) &= u_A(M-A) \\ &= f(M) - f(A) \\ &= f(M) - f(B) + f(B) - f(A) \\ &= u_B(M-B) - u_B(A-B) \\ &= u_B(N-A-(A-B)) \\ &= u_B(M-A) \\ &= u_B(\vec{v}) \end{aligned}$$

■

Théorème

Une application $f\colon E \longrightarrow E'$ vérifiant les propriétés de la proposition précédente s'appelle une application affine. L'application linéaire du (ii) s'appelle l'application linéaire associée. On la note $\vec{f}$. Alors $\vec{f}\colon \vec{E} \longrightarrow \vec{E}'$ est linéaire.

On a $f(M) = f(A) + \vec{f}(M - A)$.

Corollaire

Soit $f\colon E \longrightarrow E'$ une application affine.

- f conserve l'alignement
- f conserve les rapports de vecteurs colinéaires (en particulier, f envoie les milieux sur les milieux)
- Si F est un soues-espace affine de E alors $f(F)$ est un sous-espace affine de E' dirigé par $\vec{f}(\vec{F})$.

Proposition

Soient $A \in E$ et $A' \in E'$ et $\vec{g} \in \mathcal{L}(\vec{E}, \vec{E}')$. Il existe une unique application affine $f\colon E \longrightarrow E'$ telle que $f(a) = A'$ et $\vec{f} = \vec{g}$.

Il faut $f(M) = A' + \vec{f}(M - A)$.

Soit $(O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ un repère cartésien de E et $(O', \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_p)$ un repère cartésien de E'. Soit $B' \in E'$, on a $B' = O' + \sum\limits_{i=1}^{p} b_i \vec{f}_i$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$ tel que $\mathrm{Mat}(\vec{f}, (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n), (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_p)) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$. Soit f l'application affine telle que $f(O) = B'$ d'application linéaire associée $\vec{f}$. Si $M \in E$ avec $M = O + \sum\limits_{i=1}^{n} x_n \vec{e}_i$ alors on a $f(M) = O' + \sum\limits_{i=1}^{p} y_i \vec{f}_i$ avec $\begin{cases} y_1 = b_1 + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1,j} x_j \\ y_2 = b_2 + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2,j} x_j \\ \vdots \\ y_p = b_p + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{p,j} x_j \end{cases}$. Soit (A_1, A_2, A_{n+1}) un repère affine de E. Soit $(B'_1, B'_2, \ldots, B'_{n+1})$ $n+1$ points de E'. Il existe une unique application affine $f\colon E \longrightarrow E'$ telle que $f(A_1) = B'_1$, $f(A_2) = B'_2$, …, $f(A_{n+1}) = B'_{n+1}$. Si $M = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i A_i \in E$ avec $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, on a $f(M) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i B'_i$.

Points fixes

Définition

Soit $f\colon E \longrightarrow E$ une application affine. Un point $M \in E$ est un point fixe de f si $f(M) = M$. On note $\mathrm{Fix}(f)$ l'ensemble des points fixes de f.

Proposition

Soit $f\colon E \longrightarrow E$ une application affine. Si $\mathrm{Fix}(f) \neq \varnothing$, alors $\mathrm{Fix}(f)$ est un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{\mathrm{Fix}(f)} = \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}})$.

Démonstration : Soit $A_1, \ldots, A_k \in \mathrm{Fix}(f)$ alors $M = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i A_i \in \mathrm{Fix}(f)$ avec $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. Donc $\mathrm{Fix}(f)$ est stable par barycentre. Soit $A \in \mathrm{Fix}(f)$. On a $M - A \in \{M - A \ / \ M \in \mathrm{Fix}(f)\} \iff f(M) = f(A) + \vec{f}(M - A) = M \iff A + \vec{f}(M - A) = M \iff \vec{f}(M - A) - (M - A) = \vec{0} \iff M - A \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}})$ ■

Proposition

Soit $f\colon E \longrightarrow E$ une application affine. f admet un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$.

Démonstration : On pose $\vec{g} = \vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}}$. On écrit $f(M) - M = (f(A) - A) + (f(M) - f(A) - (M - A)) = f(A) - A + \vec{g}(M - A)$. On a $f(M) = M$ si et seulement si $\vec{g}(M - A) = A - f(A)$. Or, $\vec{g}(M - A) = A - f(A)$ est une équation dans $\vec{E}$ d'inconnue $M - A$. Si 1 n'est pas valeur propres de $\vec{f}$ alors $\vec{g}$ est injective et l'équation n'a qu'une seule solution $M - A$ et M est l'unique point fixe de f. Réciproquement, si f a un seul point fixe, l'équation n'a qu'une seule solution et $\vec{g}$ est injective. ■

Proposition

Soit $A \in E$, et f une application affine. Alors f s'écrit de façon unique comme la composée d'une translation et d'une application affine g qui fixe A.

Démonstration : On écrit $f = t_{\vec{v}} \circ g$ avec $\vec{v} = f(A) - A$. ■

L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \vec{E} & \longrightarrow & \Omega \\ \vec{g} & \longmapsto & f\colon M \longmapsto A + \vec{g}(M-A) \end{array}\right.$ où Ω est l'ensemble des applications affines qui fixent A est bijective.

Soit $f\colon E \longrightarrow E$ une application affine. Alors $\vec{f} = \mathrm{Id}_{\vec{E}} \iff f$ est une translation.

2. Groupe affine

Soient $f, g\colon E \longrightarrow E$ deux applications affines. Alors $g \circ f$ est une application affine. Si f est bijective, f^{-1} est encore une application affine.

Définition

Le groupe affine est le groupe des applications affines bijectives muni de la composition des applications. On le note $\mathrm{GA}(E)$.

Proposition

Le groupe affine est un sous-groupe du groupe des permutations de E. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{GA}(E) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\vec{E}) \\ f & \longmapsto & \vec{f} \end{array}\right.$ est un morphisme de groupes, surjectif de noyau $\mathcal{T}$.

En particulier, le sous-groupe $\mathcal{T}$ de $\mathrm{GA}(E)$ est un sous-groupe distingué : $f \circ t_{\vec{v}} \circ f^{-1} \in \mathcal{T}$. On a $f \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{f}(\vec{v})}$. Alors $(f \circ t_{\vec{v}} \circ f^{-1})(M) = f(t_{\vec{v}} \circ f^{-1}(M)) = f(f^{-1}(M) + \vec{v}) = f(f^{-1}(M)) + \vec{f}(\vec{v}) = M + \vec{f}(\vec{v})$.

Remarque

$f \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ f \iff \vec{v} = \vec{f}(\vec{v}) \iff \vec{v} \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}})$.

Soit $A \in E$, on note $\mathrm{GA}(E)_A$ le sous-groupe de $\mathrm{GA}(E)$ des bijections affines qui fixent A.

Théorème

Soit $A \in E$, $f \in \mathrm{GA}(E)$ s'écrit de façon unique $t_{\vec{v}} \circ g$ avec $g \in \mathrm{GA}(E)_A$. Alors $\mathrm{GA}(E) = \mathcal{T} \rtimes \mathrm{GA}(E)_A$.

3. Homothéties - Translations

Définition

Soit $C \in E$ et $k \in \mathbb{K}^\times$. Une application affine h telle que $h(M) = C + k(M - C)$ est appelée homothétie.

Si h est une homothétie, $\vec{h} = k\,\mathrm{Id}_{\vec{E}}$.

Proposition

Soit h une homothétie définie par $h(M) = C + k(M - C)$.

- $h = \mathrm{Id}_E \iff k = 1$
- Si $k \neq 1$, C est l'unique point fixe de h.

On a définit $\psi\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{GA}(E) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(E) \\ f & \longmapsto & \vec{f} \end{array}\right.$. On a $\psi^{-1}(\{0\}) = \mathrm{Ker}\,\psi = \mathcal{T}$. Alors $\psi^{-1}(\mathbb{K}^\times \mathrm{Id}_{\vec{E}})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GA}(E)$ appelé groupe des homothéties-translations.

Proposition

Soit h une homothétie de rapport $k \notin \{0, 1\}$ de centre C et soit $t_{\vec{v}}$ une translation de vecteur $\vec{v}$. Alors $h \circ t_{\vec{v}}$ est une homothétie de rapport k et de centre $C + \frac{k}{1-k}\vec{v}$ et $t_{\vec{v}} \circ h$ est une homothétie de rapport k et de centre $C + \frac{k}{1-k}\vec{v}$.

Soit h_1 (respectivement h_2) une homothétie de centre C_1 (respectivement C_2) de rapport k_1 (respectivement k_2). Si $k_1k_2 \neq 1$, alors $h_1 \circ h_2$ est une homothétie de rapport k_1k_2 de centre $\frac{1-k_1}{1-k_1k_2}C_1 + \frac{k_1 - k_1k_2}{1-k_1k_2}C_2$. Si $k_1k_2 = 1$, alors $h_1 \circ h_2$ est une translation de vecteur $(1 - k_1)(C_1 - C_2)$.

Démonstration : Soit h_1 une homothétie de centre C_1 et de rapport k_1 et h_2 une homothétie de centre C_2 et de rapport k_2. Soit M un point de E.

Si $k_1k_2 \neq 1$ alors $h_1 \circ h_2(M) = (1-k_1k_2)\left(\frac{1-k_1}{1-k_1k_2}C_1 + \frac{k_1-k_1k_2}{1-k_1k_2}C_2\right) + k_1k_2M$. Donc $h_1 \circ h_2$ est une homothétie de centre $\frac{1-k_1}{1-k_1k_2}C_1 + \frac{k_1-k_1k_2}{1-k_1k_2}C_2$ et de rapport k_1k_2.
Si $k_1k_2 \neq 1$ alors $h_1 \circ h_2(M) = (1-k_1)(C_1-C_2)+M$. Alors $h_1 \circ h_2$ est une translation de vecteur $(1-k_1)(C_1-C_2)$. ■

Proposition

Soient h_1, h_2, h_3 trois homothétie-translation telles que $h_1 \circ h_2 \circ h_3 = \mathrm{Id}$. Parmi h_1, h_2, h_3 il y a trois, une ou aucune translation.

- S'il y a trois translations de vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ alors $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$.
- S'il y a une translation, son vecteur est colinéaire avec le vecteur directeur de la droite engendrée par le centre des deux homothéties.
- S'il n'y a aucune translation, les centres des trois homothéties sont alignés ou confondus.

4. Projections, symétries

Dans le cas vectoriel

Soit $\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{G}$. On pose $\vec{p}$: $\begin{cases} \vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{G} & \longrightarrow & \vec{E} \\ \vec{x} = \vec{f} + \vec{g} & \longmapsto & \vec{f} \end{cases}$. Alors $\vec{p}$ est la projection sur $\vec{F}$ parallèlement à $\vec{G}$ et $\vec{p}$ est linéaire. On a $\vec{p}^2 = \vec{p}$. Réciproquement, un application linéaire $\vec{p}$ telle que $\vec{p}^2 = \vec{p}$ est une projection sur $\mathrm{Im}(\vec{p}) = \mathrm{Ker}(\vec{p} - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(\vec{p})$.
On pose $\vec{s}$: $\begin{cases} \vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{G} & \longrightarrow & \vec{E} \\ \vec{x} = \vec{f} + \vec{g} & \longmapsto & \vec{f} - \vec{g} \end{cases}$. Alors $\vec{s}$ est la symétrie par rapport à $\vec{F}$ parallèlement à $\vec{G}$ et $\vec{s}$ est linéaire. On a $\vec{s}^2 = \mathrm{Id}$. Réciproquement, un application linéaire $\vec{s}$ telle que $\vec{s}^2 = \mathrm{Id}$ est une symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(\vec{s} - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(\vec{s} + \mathrm{Id})$.

Théorème-Définition

Soit $\vec{F}$ un sous-espace affine et $\vec{G}$ un supplémentaire de $\vec{F}$ (*i. e.* $\vec{E} = \vec{F} + \vec{G}$). Soit $M \in E$, le sous-espace affine $M + \vec{G}$ coupe F en un unique point $p(M)$.
L'application $M \longmapsto p(M)$ s'appelle la projection affine sur $\vec{F}$ parallèlement à $\vec{G}$ et c'est une application affine. On a $p^2 = p$ et $p(M) = M \iff M \in F$.
L'application $M \longmapsto s(M) = 2p(M) - M$ s'appelle la symétrie affine par rapport à F parallèlement à $\vec{G}$. C'est une application affine. On a $s^2 = \mathrm{Id}$ et $s(M) = M \iff M \in F$.

Démonstration : Soit $A \in F$. On a $M - A = \underbrace{M - p(M)}_{\in \vec{G}} + \underbrace{p(M) - A}_{\in \vec{F}}$. Alors $p(M) - A$ est la projection vectorielle de $M - A$ sur $\vec{F}$ parallèlement à $\vec{G}$. ■

Théorème-Définition

Soit p une application affine. On a $p^2 = p \iff p$ est une projection affine.
Soit s une application affine. On a $s^2 = \mathrm{Id} \iff s$ est une symétrie affine.

Démonstration : Dans le cas $p^2 = p$, soit $M_0 \in E$. On pose $A = p(M_0)$ et donc A est un point fixe de p. On a $p(M) = A + \vec{p}(M - A)$ et de $p^2 = p$ on déduit que $\vec{p}^2 = \vec{p}$. ■

5. Quelques théorèmes classiques

Notation

Si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux vecteurs non nuls et colinéaires, il existe un unique $k \in \mathbb{K}$ tel que $\vec{v} = k\vec{w}$. On note (ici) $k = \frac{\vec{v}}{\vec{w}}$.

Attention

Ceci a du sens uniquement si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires (et $\vec{w} = \vec{0}$).

Si $A, B, C, D \in E$ sont distincts et alignés, alors $C - A$ et $B - A$ sont colinéaires et $\frac{C-A}{B-A} \in \mathbb{K}$ désigne le vecteur tel que $(C - A) = \frac{C-A}{B-A}(B - A)$.

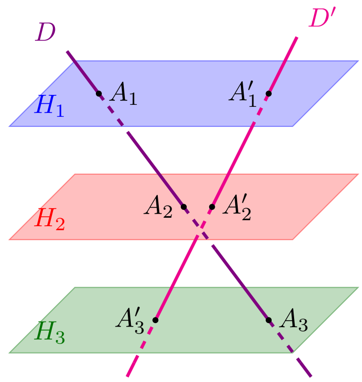
Une autre notation plus classique

Soient A, B, C trois points alignés. Alors $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \in \mathbb{K}$ où $\overline{AC}$ désigne la mesure algébrique de $[AC]$.

Soit $\mathscr{D}$ une droite et $A, B, C \in \mathscr{D}$. Soit $\vec{v}$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. On a $B = A + k\vec{v}$ et alors $k = \overline{AB}$. $\overline{AB}$ dépend du vecteur $\vec{v}$ mais le rapport $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ ne dépend pas de $\vec{v}$.

Théorème de Thalès

Soient H_1, H_2, H_3 trois hyperplans (affines) distincts et parallèles. Soient D et D' deux droites non faiblement parallèles aux hyperplans. On note A_i (respectivement A'_i) le point d'intersection unique entre H_i et D (respectivement H_i et D'). On a $\frac{A'_3 - A'_1}{A'_2 - A'_1} = \frac{A_3 - A_1}{A_2 - A_1}$.



La réciproque est fausse.

Démonstration : Soit p une projection sur D' parallèlement à $\vec{H}_1$. On a $p \colon \begin{cases} A_1 \longmapsto A'_1 \\ A_2 \longmapsto A'_2 \\ A_3 \longmapsto A'_3 \end{cases}$. Alors p est affine $\iff$ p conserve les rapports de vecteurs. ■

Théorème de Thalès dans le plan

Soient D et D' deux droites sécantes en O, $A, B \in D$ et $A', B' \in D'$ quatre points distincts de O. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\frac{B'-O}{A'-O} = \frac{B-O}{A-O}$
(ii) $(AA') \parallel (BB')$

Démonstration : $\boxed{\text{(ii)} \implies \text{(i)}}$ Ceci découle du théorème de Thalès.

$\boxed{\text{(i)} \implies \text{(ii)}}$ Soit h une homothétie de centre O qui envoie A sur B et de rapport $\frac{B-O}{A-O}$. Si on suppose que $\frac{B-O}{A-O} = \frac{B'-O}{A'-O}$. Alors h envoie A' sur B'. Donc l'image de la droite (AA') est la droite (BB'). On a donc $h(M) = O + k(M - O)$ où $D = A + k\vec{v}$. Alors $h(A + \lambda\vec{v}) = O + k(A + \lambda\vec{v} - O) = ((1-k)O + k(A)) + k\lambda\vec{v}$. ■

Théorèmes de Ménélaüs et de Céva

Soient A, B, C trois points affinement libres (ABC est alors un triangle non applati). Soient A', B', C' trois points tels que $\begin{cases} A' \in (BC), & A' \neq B, & A' \neq C \\ B' \in (AC), & B' \neq A, & B' \neq C \\ C' \in (AB), & C' \neq A, & C' \neq B \end{cases}$. On pose $k = \frac{C-A'}{B-A'} \frac{B-C'}{A-C'} \frac{A-B'}{C-B'}$.
Les points A', B', C' sont alignés si et seulement si $k = 1$. (Ménélaüs)
Les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont parallèles ou concourantes si et seulement si $k = -1$. (Céva)

Démonstration : $\boxed{\text{Ménélaüs}}$ Soient $h_{A'}$ l'homothétie de centre A' et de rapport $\frac{C-A'}{B-A'}$, $h_{B'}$ l'homothétie de centre B' et de rapport $\frac{A-B'}{C-B'}$ et $h_{C'}$ l'homothétie de centre C' et de rapport $\frac{B-C'}{A-C'}$. On a alors $h_{A'}(B) = C$, $h_{B'}(C) = A$ et $h_{C'}(A) = B$. On pose $h = h_{A'} \circ h_{B'} \circ h_{C'}$. Alors h est une homothétie-translation de rapport k. On a $h(B) = B$. Alors B est un point fixe de h et alors h est une homothétie (ou l'identité). Si $k = 1$, alors $h = \mathrm{Id}$ donc les centes A', B', C' sont alignés. Si $\underbrace{A', B', C'}_{=D}$ sont alignés, alors $h(D) = D$ donc le centre (s'il existe) de h est sur D. Donc h a deux points fixes et $h = \mathrm{Id}$, donc $k = 1$. ■

6. Théorème fondamental de la géométrie affine

Soient E, E' deux espaces affines sur $\mathbb{K}$.

Définition

Une application $\vec{f} \colon \vec{E} \longrightarrow \vec{E}'$ est dite semi-linéaire si :

- $\vec{f}(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{f}(\vec{y})$
- Il existe $\sigma \colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ un automorphisme tel que $\vec{f}(\lambda\vec{x}) = \sigma(\lambda)\vec{f}(\vec{x})$.

Une application $f \colon E \longrightarrow E'$ est dite semi-affine si pour tout A, l'application $\vec{f} \colon \begin{cases} \vec{E} & \longrightarrow & \vec{E}' \\ \vec{x} & \longmapsto & f(A + \vec{x}) - f(A) \end{cases}$ est semi-linéaire.

Remarque

Si f est semi-affine, l'application $\vec{f} \colon \vec{x} \longmapsto f(A + \vec{x}) - f(A)$ ne dépend pas de A.

Proposition

On suppose que $\dim E \geqslant 2$. Si $f\colon E \longrightarrow E'$ vérifie les propriétés suivantes :

- Pour toute droite D de E, $f(D)$ est une droite de E' et f réalise en bijection de D dans $f(D)$.
- Si D_1 et D_1 sont deux droites parallèles alors $f(D_1) \parallel f(D_2)$.

Alors f est semi-affine.

Démonstration : • f est injective. En effet, soient $A \neq B \in E$, alors $f\colon (AB) \longrightarrow E'$ est injective et donc $f(A) \neq f(B)$.

- Si A, B, C sont trois points affinement libres, alors $f(A), f(B), f(C)$ aussi. En effet, $f|_{(AB)}\colon (AB) \longrightarrow (f(A)f(B))$ est bijective, si $f(C) \in (f(A)f(B))$, alors $D = f|_{(AB)}^{-1}(f(C)) \in (AB)$. D'où $D \in (AB)$ et $f(D) = f(C)$ et $C \notin (AB)$ et $f(C) = f(D)$. Comme f est injective, c'est impossible.
- On en déduit que si $D_1 \parallel D_2$ et $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ alors $f(D_1) \parallel f(D_2)$ et $f(D_1) \cap f(D_2) = \varnothing$.
- On déduit aussi que si $D_1 \cap D_2 = \{A\}$ alors $f(D_1) \cap f(D_2) = \{f(A)\}$.
- Aussi, si $ABCD$ est un parallélogramme non plat, alors $f(A)f(B)f(C)f(D)$ est un e parallélogramme non plat.
- Soit $A \in E$, on pose $\vec{f}\colon \begin{cases} \vec{E} & \longrightarrow & \vec{E'} \\ \vec{x} & \longmapsto & f(A+\vec{x}) - f(A) \end{cases}$ On montre que $\vec{f}$ est semi-linéaire.

  Soient $\vec{x}, \vec{y}$ linéairement indépendants, alors $A, A+\vec{x}, A+\vec{x}+\vec{y}, A+\vec{y}$ est un parallélogramme non aplati et $f(A), f(A+\vec{x}), f(A+\vec{x}+\vec{y}), f(A+\vec{y})$ est un parallélogramme non aplati. Donc $f(A+\vec{x}+\vec{y}) - f(A) = f(A+\vec{x}) - f(A) + f(A+\vec{y}) - f(A)$ d'où $\vec{f}(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{f}(\vec{y})$.

  Si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont linéairement dépendants, soit $\vec{z}$ linéairement indépendant de $\vec{x}$ et $\vec{y}$. Alors $\vec{f}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}) = \vec{f}(\vec{x}+\vec{y}) + \vec{f}(\vec{z})$ mais aussi $\vec{f}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}) = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{f}(\vec{y}+\vec{z})$ alors $\vec{f}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}) = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{f}(\vec{y}) + \vec{f}(\vec{z})$.

  L'image de $A + \mathbb{K}\vec{x}$ est une droite passant par $f(A)$ et dirigée par $\mathbb{K}\vec{f}(\vec{x})$ alors $f(A+\vec{x}) = f(A) + \vec{f}(\vec{x})$. Donc $\vec{f}(\lambda\vec{x})$ est colinéaire à $\vec{f}(\vec{x})$ donc $\vec{f}(\lambda\vec{x}) = \sigma_{\vec{x}}(\lambda)\vec{f}(\vec{x})$.

  Soient $\vec{x}, \vec{y}$ linéairement indépendants, soient $\vec{f}(\lambda(\vec{x}+\vec{y})) = \sigma_{\vec{x}+\vec{y}}(\lambda)\vec{f}(\vec{x}+\vec{y}) = \sigma_{\vec{x}+\vec{y}}(\lambda)\vec{f}(\vec{x}) + \sigma_{\vec{x}+\vec{y}}\vec{f}(\vec{y})$ mais aussi $\vec{f}(\lambda(\vec{x}+\vec{y})) = \vec{f}(\lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}) = \vec{f}(\lambda\vec{x}) + \vec{f}(\lambda\vec{y}) = \sigma_{\vec{x}}(\lambda)\vec{f}(\vec{x}) + \sigma_{\vec{y}}\vec{f}(\vec{y})$. Comme les vecteurs $\vec{f}(\vec{x})$ et $\vec{f}(\vec{y})$ sont indépendants, on a $\sigma_{\vec{x}}(\lambda) = \sigma_{\vec{x}+\vec{y}}(\lambda) = \sigma_{\vec{y}}(\lambda)$.

  Si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont linéairement dépendants, soit $\vec{z}$ linéairement indépendant de $\vec{x}$ et $\vec{y}$. Alors on a $\sigma_{\vec{x}+\vec{y}} = \sigma_{\vec{z}}(\lambda)$ car $\vec{x}+\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont indépendants et $\sigma_{\vec{z}}(\lambda) = \sigma_{\vec{x}}(\lambda)$ et $\sigma_{\vec{x}}(\lambda) = \sigma_{\vec{y}}(\lambda)$.

  On a montré que $\sigma_{\vec{x}}(\lambda)$ est indépendant de $\vec{x}$. On le note $\sigma(\lambda)$ au lieu de $\sigma_{\vec{x}}(\lambda)$. On a $\vec{f}(\lambda\vec{x}) = \sigma(\lambda)\vec{f}(\vec{x})$.

  On a $\vec{f}((\lambda+\mu)\vec{x}) = \vec{(}\lambda\vec{x}) + \vec{f}(\mu\vec{x}) = \sigma(\lambda)\vec{f}(\vec{x}) + \sigma(\mu)\vec{f}(\vec{x})$ et d'autre part, $\vec{f}((\lambda+\mu)\vec{x}) = \sigma(\lambda+\mu)\vec{f}(\vec{x})$. Donc $\sigma(\lambda+\mu) = \sigma(\lambda) + \sigma(\mu)$. De même, on montre que $\sigma(\lambda\mu) = \sigma(\lambda)\sigma(\mu)$. ■

Corollaire

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si $f\colon E \longrightarrow E'$ vérifie les propriétés de la proposition précédente alors f est affine.

Démonstration : Si $\sigma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un automorphisme alors $\sigma = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

- $\sigma(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $\sigma(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$
- $\sigma(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q}$ pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$
- $\sigma(x^2) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors σ envoie les positis de $\mathbb{R}$ sur les positifs de $\mathbb{R}$, donc σ respecte l'ordre.
- Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $r_0 < \cdots < r_{n-1} < r_n < x < s_n < s_{n-1} < \cdots < s_0$ avec $r_i, s_i \in \mathbb{Q}$. On a $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Alors quand on applique σ, on a $r_0 < \cdots < r_{n-1} < r_n < \sigma(x) < s_n < s_{n-1} < \cdots < s_0$ et donc $\sigma(x) = x$. ■

Théorème fondamental de la géométrie affine

On suppose que $\dim E = \dim E' \geqslant 2$ et $f\colon E \longrightarrow E'$ telle que f est bijective et si A, B, C sont alignés alors $f(A), f(B), f(C)$ sont alignés. Alors f est semi-affine. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, f est affine.

Démonstration : Si $C \in (AB)$ alors $f(C) \in (f(A)f(B))$ donc $f(AB) \subset (f(A)f(B))$.
Plus généralement si $A_1, \ldots, A_k$ engendrent un sous-espace affine F alors $f(F)$ est inclus dans un sous espace affine engendré par $f(A_1), \ldots, f(A_k)$.
Si de plus, $A_1, \ldots, A_k$ sont affinement libres alors $f(A_1), \ldots, f(A_k)$ aussi. On complète $A_1, \ldots, A_k$ en $A_1, \ldots, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_{n+1}$ une base affine de E. Donc $f(E)$ est inclus dans le sous-espace affine engendré par $f(A_1), \ldots, f(A_k), \ldots, f(A_{n+1})$ et $f(E) = E$.
On en déduit que l'image d'une droite D par f est une droite $f(D)$ de E'.
Si $D_1 \parallel D_2$ et $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ alors $f(D_1) \cap f(D_2) = \varnothing$. Or, D_1, D_2 engendre un sous-espace affine de dimension 2. Donc $f(D_1), f(D_2)$ engendre un sous-espace affine affine de dimension 2.. Donc $f(D_1) \parallel f(D_2)$ et on applique la proposition. ■

Corollaire

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si $f\colon E \longrightarrow E$ transforme des droites en droites alors f est une application affine.